НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 11

6.4 Функция Ляпунова

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x)\ , \tag{6.15}$$

где $x = [x_1 x_2 ... x_n]^T$.

Запишем ее развернуто

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}\ . \tag{6.16}$$

Допустим, что система имеет невозмущенное движение $x = 0$. Будем исследовать устойчивость этого невозмущенного движения.

Рассмотрим скалярную функцию $V(x) = V(x_1, x_2, ..., x_n)$ от тех же переменных, что и в нашей системе (6.16). Если эта функция является положительно определенной и если, используя эту функцию в теоремах второго метода Ляпунова (теоремы рассмотрены ниже), можно выяснить устойчивость или неустойчивость системы, то эта функция называется функцией Ляпунова для системы (6.16).

Таким образом, *положительно определенная функция от переменных, фигурирующих в динамической системе, называется функцией Ляпунова для этой системы, если она позволяет установить устойчивость или неустойчивость данной системы по теоремам второго метода Ляпунова*.

Составим полную производную функции Ляпунова (точнее, претендента на функцию Ляпунова) вдоль траектории решения системы (6.16). Это можно сделать потому, что переменные *x* в системе (6.16) и в функции *V* одни и те же. Поскольку траектория системы (6.16) по каждой координате x_i есть функция времени, а функция *V* зависит от этих координат, то, таким образом, функция *V* становится сложной функцией времени. Нам удобно представить производную по времени этой функции известной из математики формулой для сложной функции. С учетом (6.15), (6.16) эта производная имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \\
&= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n
\end{aligned}\ . \tag{6.17}$$

Данная производная еще называется "полная производная функции V в силу системы (6.16)".

В левой части (6.17) производная по времени, справа – некоторая функция от координат x_i, поэтому можно записать

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, ..., x_n) \ , \tag{6.18}$$

где W – функция от координат x_i, определяемая правой частью (6.17).

Функция W, так же как и V, обращается в нуль при $x = 0$, и к ней можно применять понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности. Это будет использовано в дальнейшем.

Частные производные функции Ляпунова по координатам модно рассматривать, как градиент

$$gradV = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\} \ . \tag{6.19}$$

Учитывая (6.17, 6.19), выражение (6.18) можно записать в виде скалярного произведения

$$\frac{dV}{dt} = W(x) = gradV \bullet f(x) = |gradV| \cdot |f(x)| cos\,\alpha \ , \tag{6.20}$$

где значок $\bullet$ означает скалярное произведение, $|(\cdot)|$ – норма (длина вектора $(\cdot)$), α – угол между векторами $gradV$ и $f(x)$.

Тогда возможна геометрическая интерпретация рассмотренных категорий (функций) (рисунок 6.3).

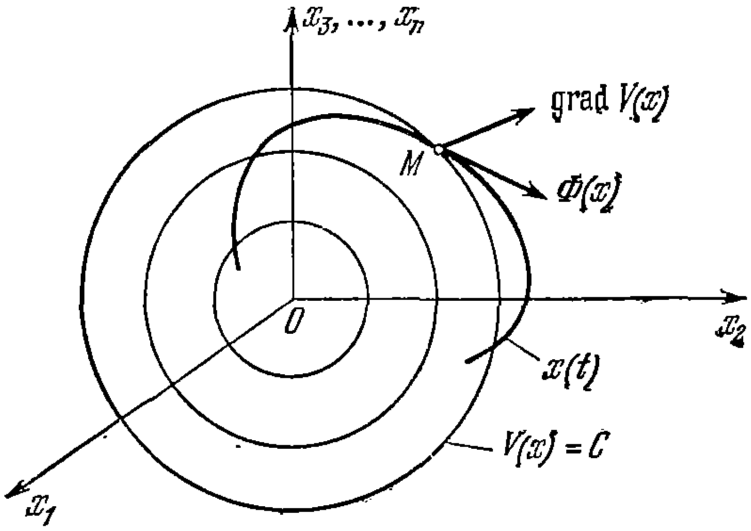

Рисунок 6.3 – Некоторые геометрические построения в связи с функцией Ляпунова

Вектор $f(x)$ есть вектор скорости изображающей точки в пространстве состояний, это следует из уравнений (6.16). Вектор $grad\ V$ перпендикулярен к поверхности V = const в сторону увеличения значений V. Если при этом производная $\frac{dV}{dt} > 0$, то, согласно (6.20), вектор скорости $f(x)$ составляет с вектором $grad\ V$ острый угол α и фазовая траектория пересекает поверхность V = const в сторону увеличения значений V, то есть удаляется от начала координат. Это значит, что система неустойчива. Если $\frac{dV}{dt} < 0$, то угол α тупой и фазовая траектория пересекает поверхность V = const в сторону уменьшения значений V, то есть приближается к началу координат и система устойчива. На основании этого можно сказать, расходятся или сходятся траектории от положения равновесия, то есть делать заключение об устойчивости системы. Подробности подобных рассуждений Вы можете посмотреть в литературе, например, в [3, 4] и выполнить самостоятельно. Это впервые проработал Ляпунов и это составляет суть его второго метода.

6.5 Второй метод Ляпунова

Второй метод Ляпунова еще называю прямым методом Ляпунова. Суть этого метода, как и первого метода, составляют теоремы

Теоремы второго метода Ляпунова:

1) *если для системы (6.16) существует знакоопределенная функция V(x), производная от которой по времени* $\frac{dV}{dt} = W(x)$ *является знакопостоянной противоположного знака, то невозмущенное движение системы x = 0 устойчиво*.

2) *Если для системы (6.16) существует знакоопределенная функция V(x), производная от которой по времени* $\frac{dV}{dt} = W(x)$ *является также знакоопределенной, но противоположного знака, то невозмущенное движение системы x = 0 асимптотически устойчиво*.

3) *Если для системы (6.16) существует какая-нибудь функция V(x), производная от которой по времени* $\frac{dV}{dt} = W(x)$ *является знакоопределенной функцией, причем в любой окрестности начала координат имеется область, в которой знак V(x) совпадает со знаком W(x), то невозмущенное движение системы x = 0 неустойчиво*.

Казалось бы, зачем третья теорема? Но дело в том, что теоремы 1…2, а также и 3 по своему смыслу дают достаточные, но не необходимые условия устойчивости. Это значит, что если мы для данной системы не подобрали функцию Ляпунова и не доказали с помощью теорем 1 и 2, что система устойчива, то это не значит, что она неустойчива. Это может означать, что мы просто не нашли подходящую для нашей устойчивой системы функцию Ляпунова. Для того, чтобы точно знать, что система неустойчива, и нужна третья теорема. Но здесь также, если мы не нашли функцию Ляпунова для теоремы 3, мы не можем утверждать, что система неустойчива.

Порядок применения второго (прямого) метода Ляпунова:

1) представляем уравнения системы в нормальной форме системы уравнений первого порядка $\dot{x} = f(x)$ (6.16);

2) выбираем функцию Ляпунова *V(x)*;

3) составляем выражение для производной функции Ляпунова вдоль траектории системы $\frac{dV}{dt} = W(x)$;

4) выявляем знакоопределенность и знак *W(x)* или условия, при которых невозмущенное движение x = 0 системы (6.16) устойчиво.

Самым трудным из этой методики является п. 2. то есть выбор функции Ляпунова. Методика не дает метода выбора, и здесь приходится следовать своей интуиции и опыту. Но люди поработали в этом направлении, и есть многочисленные рекомендации.

Заметим, что, согласно данному выше определению, положительно определенная функция будет функцией Ляпунова только тогда, когда мы с ее помощью решили задачу определения устойчивости или неустойчивости системы.

Следует сказать, что для одной и той же системы можно подобрать и использовать разные функции Ляпунова и получить несколько разные условия устойчивости. Эти результаты не будут противоречить друг другу, но, например, области устойчивости будут разными: одна шире другой.

Несомненным достоинством прямого метода Ляпунова является то, что для исследования устойчивости динамической системы не нужно решать дифференциальные уравнения этой системы, ля решения задачи используются только правые части этих уравнений, представленные в пространстве состояний.

Таким образом: *достоинство прямого метода Ляпунова – для исследования устойчивости системы не нужно решать уравнения этой системы. Недостаток – трудность поиска функции Ляпунова*.

6.6 Методы построения функций Ляпунова

Общего метода построения функций Ляпунова нет. Разработаны различные методы, позволяющие находить функции Ляпунова для определенного типа систем. Кратко рассмотрим некоторые из них.

1) Энергетический подход. При таком подходе в качестве кандидата на функцию Ляпунова принимают полную энергию, представляющую сумму потенциальной и кинетической энергии. Энергия всегда положительная и может обращаться в ноль, в этом смысле она подходит в качестве претендента на функцию Ляпунова.

2) Метод разделения переменных. Метод разработан Барбашиным и состоит в следующем. Кандидатов на функцию Ляпунова ищут среди функций, которые сами и их производные по времени в силу уравнений системы представляют сумму функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}F_i(x_i)\,,\quad \dot V(x)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x_i)$$

3) Метод Лурье-Постникова. Предложен В.Н. Постниковым, когда он рассматривал задачу об устойчивости системы с одной нелинейностью. $u=f(\varepsilon)$.

Здесь кандидат на функцию Ляпунова ищется в виде суммы из квадратичной формы и интеграла от нелинейной функции

$$V(x)=x^TQx+\int_0^{\varepsilon}f(\varepsilon)d\varepsilon\,. \tag{6.24}$$

где $\varepsilon=c^Tx$

Более детально этот метод разработан А.И. Лурье для решения задач об абсолютной устойчивости.

4) Метод Красовского. По этому методу кандидат на функцию Ляпунова ищется в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Qx \,. \tag{6.25}$$

Симметричную матрицу Q выбирают так, чтобы сама квадратичная форма была положительно определенной, а ее производная в силу уравнений системы – отрицательно определенной.